

مدل ریاضی نفوذ آب در آبیاری قطره‌ای

Mathematical model of infiltration in trickle irrigation

علی رحیمی خوب*، جمال محمدولی سامانی** و سید محمودرضا بهبهانی***

چکیده

یکی از عوامل مهم در طراحی سیستم آبیاری قطره‌ای تعیین جبهه رطوبت خاک ناشی از یک قطره‌چکان نقطه‌ای می‌باشد. در این بررسی یک مدل ریاضی برای پیش‌بینی موقعیت جبهه رطوبت خاک در حین آبیاری بایک قطره‌چکان موضعی برای یک خاک همگن در شرایط ناپایدار ارائه شده است. این مدل معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان غیراشباع در سیستم مختصات استوانه‌ای با روش عددی ضمنی غیر مستقیم (ADI) را حل می‌نماید. نتایج مدل بنیان شده با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفت و همخوانی خوبی ملاحظه گردید. ارزیابی بیان جرمی مدل بین جریان‌های ورودی آب به خاک و تغییرات رطوبت در پروفیل خاک نشان داد که حدود ۵ درصد خطا در محاسبات وجود دارد که در کارهای عملی آبیاری ناچیز است.

واژه‌های کلیدی: جریان ناپایدار، آبیاری قطره‌ای، جریان غیراشباع آب در خاک، مدل ریاضی

مقدمه

عمقی از عواملی است که باعث افزایش راندمان آبیاری در این سیستم می‌شود. در این روش فقط قسمتی از خاک اطراف گیاه خیس می‌شود و در این شرایط قسمتهای اضافی خاک مابین ردیف بوته‌ها یا درختان که معمولاً در روش‌های سنتی خیس می‌شود و آب آن به مصرف تبخیر و تعرق علفهای هرز می‌رسد، خشک میماند. در روش

آبیاری قطره‌ای روشی است که در آن برای هر بوته یا درخت آب رابه اندازه نیاز در اختیار ریشه قرار می‌دهد. این عمل به وسیله قطره‌چکانها که در فواصل معینی روی لوله‌های آبدی پلاستیکی قرار گرفته‌اند انجام می‌شود. کاهش تبخیر از سطح خاک، عدم وجود رواناب سطحی و کنترل نفوذ

*- مربی گروه آبیاری مجتمع آموزش عالی ابوریحان، دانشگاه تهران، تهران - ایران

** - استادیار گروه مهندسی تاسیسات آبیاری، دانشگاه تربیت مدرس، تهران - ایران

*** - استادیار گروه آبیاری مجتمع آموزش عالی ابوریحان، دانشگاه تهران، تهران - ایران

به اثبات رسید و نتایج نشان داد که راه حل تحلیلی برای پیش‌بینی صحیح نیم‌رخ آب در خاک قابل استفاده نمی‌باشد.

مواد و روشها

تقوی و همکاران (۹) معادله دو بعدی حاکم بر جریان غیر اشباعی آب در خاک همگن در شرایط ناپایدار و در سیستم مختصات استوانه‌ای را به شرح زیر ارائه نموده است:

$$\frac{\delta}{\delta r} [rk(\psi) \frac{\delta \psi}{\delta z}] + \frac{\delta}{\delta z} [k(\psi) \frac{\delta \psi}{\delta z}] - \frac{\delta k(\psi)}{\delta z} = \frac{d\theta}{d\psi} \frac{\delta \psi}{\delta t} \quad (1)$$

که در آن:

ψ = پتانسیل ماتریک خاک [L]

$k(\psi)$ = هدایت هیدرولیکی خاک تابعی از

پتانسیل ماتریک (LT^{-1})

θ = رطوبت حجمی خاک ($L^3 L^{-3}$)

r = فاصله شعاعی از مرکز مختصات (L)

z = فاصله عمودی از مرکز مختصات (L)

t = عامل زمان (T)

معادله فوق از ترکیب معادله حرکت (قانون دارسی) و معادله پیوستگی جریان بدست آمده است. فرضیاتی برای بدست آوردن این معادله شده که عبارتند از: آب در سرتاسر محیط متخلخل به صورت پیوسته جریان دارد، خصوصیات خاک همگن و یکسان در تمام جهات است، آب غیر قابل تراکم است، پدیده‌های بیولوژیکی بر جریان آب در خاک تأثیری ندارد، با ورود آب به خاک هوا از خاک خارج می‌شود و با تغییر رطوبت خاک، انقباض و انبساط در خاک صورت نمی‌گیرد. معادله

آبیاری قطره‌ای توزیع آب در خاک در جهات افقی و عمودی متفاوت است. گسترش افقی و عمودی جبهه رطوبت خاک بستگی به خصوصیات فیزیکی خاک و شدت نفوذ آب به خاک دارد. در خاکهای سبک گسترش عمودی جبهه رطوبت بیشتر از گسترش افقی است و پیاز رطوبتی به صورت عمودی و باریک است و در خاکهای سنگین پیاز رطوبتی پهن‌تر می‌باشد (۹). در آبیاری قطره‌ای تعیین جبهه افقی و عمودی رطوبت در خاک از اهمیت زیادی در طراحی سیستم آبیاری قطره‌ای دارد. لذا معادلات حاکم بر پدیده حرکت آب در خاک در شرایط نفوذ موضعی از یک قطره چکان باید به صورت دو بعدی یا سه بعدی مورد بررسی قرار گیرد. معادلات حاکم در جریان آب در خاک به دو صورت خطی و غیرخطی ارائه شده است. در معادلات خطی بر خلاف معادلات غیرخطی ضرائب معادله از قبیل هدایت هیدرولیکی نسبت به زمان و مکان ثابت است. فیلیپ^۱، راتس^۲ (۸ و ۷) و لومن و واریک^۳ (۵) برای شرایط پایدار معادله خطی جریان آب در خاک را به روش تحلیلی حل نموده‌اند و همچنین برای شرایط ناپایدار راه‌حل‌های تحلیلی برای معادله خطی جریان ارائه شده است (۳، ۱۰ و ۱۱). به علت فرضیاتی که در حل معادلات تحلیلی صورت می‌گیرد، کاربرد عملی معادلات تحلیلی محدود است (۴).

المالگلو و گریگوراکیس^۴ (۴) در یک مطالعه نفوذپذیری موضعی از قطره چکانهای خطی در آبیاری قطره‌ای بر روی دو نمونه خاک همگن و غیراشباع و بادو شدت مرطوب شونده را مورد بررسی قرار داد. از روش عددی برای حل دو معادله جریان خطی و غیرخطی و از روش تحلیلی فقط برای جریان خطی استفاده نمود. در مطالعه برتری صحت روش عددی نسبت به روش تحلیلی

1- Philip

2- Raats

3- Lomen & Warrick

4- Elmaloglou & Grigorakis

در مدل تفاضلهای محدود برای جریان آب در خاک شبکه حل ساخته می‌شود که شامل همه منطقه جریان آب در خاک است. محدوده شبکه استفاده شده برای مدل در شکل ۱ ارائه شده است. یک قطره چکان با شدت ثابت در نقطه A قرار گرفته است. وسعت محدوده جریان به صورتی در نظر گرفته شده که در طول زمان آبیاری جبهه رطوبت به نقاط D، F و E نرسد. برای حل معادلات تفاضلهای محدود باید شرایط اولیه و مرزی معلوم باشد در مدل جریانهای ناپایدار مقادیر متغیرهای وابسته در لحظه صفر ($t=0$) را شرط اولیه مدل می‌نامند. شرایط اولیه در مدل بنیان شده به شرح زیر است:

(۷)

$$\psi(r_i, z_i) = \psi_0(r_i, z_i) \quad r \geq 0, \quad z \geq 0, \quad t = 0$$

$\psi_0(r_i, z_i)$ مقادیر اولیه پتانسیل ماتریک در کلیه نقاط شبکه می‌باشد.

در آبیاری قطره‌ای تمام سطح خاک خیس نمی‌شود بلکه سطح خیس شده بر روی خاک محدود به اطراف محل نصب قطره چکان است و از این سطح آب به داخل خاک نفوذ می‌نماید. رطوبت قسمتی از محدوده خیس شده خاک نزدیک اشباع است و قسمتی دیگر که در حاشیه ناحیه اشباع قرار گرفته کمتر از اشباع است. تعیین محدوده خیس شده در سطح خاک از اهمیت زیادی در مدل نفوذ آب در آبیاری قطره‌ای دارد زیرا که شرایط مرزی در سطح خاک باتوجه به موقعیت محدوده فوق تعیین می‌گردد. شرایط مرزی در سطح خاک باتوجه به شرایط زیر تعیین شده است:

۱ - در زمان‌های اولیه آبیاری دبی قطره چکان

فوق حل تحلیلی نداشته و باید بوسیله روشهای عددی حل گردد و با حل معادله فوق مقادیر پتانسیل ماتریکس در فواصل شعاعی و عمودی از مرکز مختصات در زمانهای مختلف برآورد می‌گردد. روش عددی بکار گرفته شده در این تحقیق تفاضلهای محدود الگوی ضمنی غیر مستقیم^۱ (ADI) است. در تکنیک تفاضلهای محدود تابع یک پدیده پیوسته به طور تقریب برای نقاط مجزا در فضا و مکان نوشته می‌شود که این نقاط مجزا را گره می‌نامند و فواصل زمانی و مکانی گره‌ها را نمو می‌خوانند.

روش ADI سریع‌ترین تقارب در حل مسائل جریانهای دوبعدی مکانی می‌باشد که در آن دستگاه معادلات به ماتریس سه قطری تبدیل شده و با الگوریتم توماس حل می‌گردد (۱). فرم کلی معادله تفاضلی محدود معادله (۱) که متغیر وابسته (ψ) در جهت محور r ضمنی و در جهت محور z صریح نوشته شود به شرح زیر است:

$$A\psi_{i-1,j}^{n+1} + B\psi_{i,j}^{n+1} + C\psi_{i+1,j}^{n+1} = D \quad (2)$$

که ضریب معادله فوق عبارت است از:

$$A = \frac{r_{i-1} \times k_{i-1}^n}{2(\Delta r)^2} \quad (3)$$

$$C = \frac{r_{i+1} \times k_{i+1}^n}{2(\Delta r)^2} \quad (4)$$

$$B = -A - C - \left[\frac{d\theta}{d\psi} \right]_i^n \quad (5)$$

$$D = \frac{k_{i,j+1}^n}{2(\Delta z)^2} (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n) - \frac{k_{i,j-1}^n}{2(\Delta z)^2} (\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j-1}^n) - \frac{k_{i,j+1}^n + k_{i,j-1}^n}{2(\Delta z)^2} \psi_{i,j}^n - \left[\frac{d\theta}{dh} \right]_i^n \times \frac{\psi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (6)$$

1- Alternating Direct Implicite

ناحیه اشباع شده در سطح خاک است که از گره C (مفروض در شکل ۱) وارد خاک می‌گردد.

۴ - در این تحقیق مقدار تبخیر از سطح خاک در حین آبیاری ناچیز فرض شده است لذا شرایط مرزی گره‌هایی که در خارج از ناحیه خیس شده قرار گرفته‌اند از نوع جریان معلوم که میزان آن صفر است حاکم می‌باشد.

۵ - انتهای پروفیل خاک به صورتی تعیین شده که در طول آبیاری جبهه رطوبتی به آن نرسد لذا در این صورت شرایط مرزی در انتهای پروفیل خاک از نوع جریان معلوم حاکم است $(\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0)$.
باتوجه به مفروضات فوق معادلات شرایط مرزی عبارتند از:

$$(10)$$

$$\psi(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq B, \quad Z=0, \quad t > 0 \quad (11)$$

$$Q = Q_0, \quad r = C, \quad Z=0, \quad t > 0 \quad (12)$$

$$Q = 0, \quad C < r \leq D, \quad Z=0, \quad t > 0 \quad (13)$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = 0, \quad r = D, \quad Z=0, \quad t > 0 \quad (14)$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = 0, \quad A \leq Z \leq E, \quad D \leq Z \leq F, \quad t > 0 \quad (15)$$

$\frac{\delta \psi}{\delta x} = 0, \quad Z = E, \quad t > 0$
در مدل‌های ریاضی یک پدیده پیوسته به طور تقریب به صورت معادلات جبری برای یک سری نقاط مشخص در زمان و مکان نوشته می‌شود، لذا مدل‌های ریاضی نمی‌تواند کاملاً شرایط پیوستگی را ایفا نماید، ولی با نزدیک شدن نمو‌های زمانی و مکانی به سمت صفر معادلات جبری به معادلات دیفرانسیل جزئی نزدیک می‌شود و دقت مدل افزایش می‌یابد. در این تحقیق دقت مدل از طریق

کمتر از نفوذپذیری خاک است و کل جریان آب از گره A (مفروض در شکل ۱) وارد خاک می‌گردد لذا در این شرایط وضعیت شرایط مرزی بر روی این گره از نوع جریان معلوم است که شدت نفوذ آب از گره A مساوی دبی قطره چکان است (Q_e) .

۲ - با تداوم آبیاری سطح خیس شده‌ای که به حالت اشباع نزدیک است در اطراف محل نصب قطره‌چکان بوجود می‌آید. نقطه B در شکل ۱ موقعیت محدوده اشباع شده در سطح خاک را نشان می‌دهد. شعاع خیس شده این محدوده با پارامتر r_β تعریف شده است. در این بررسی پتانسیل ماتریک نقاط در هر مرحله زمانی برآورد می‌گردد و در صورتی که پتانسیل گره‌های سطح خاک مجاور قطره چکان به سمت صفر میل نماید مویذ آن است که ناحیه اشباع شده تا آن گره توسعه یافته است و در گام‌های زمانی بعدی شرایط مرزی بر روی این گره‌ها از نوع پتانسیل معلوم حاکم می‌شود که میزان آن صفر است. شدت نفوذ آب از ناحیه اشباع شده از رابطه زیر برآورد می‌گردد:

$$(8)$$

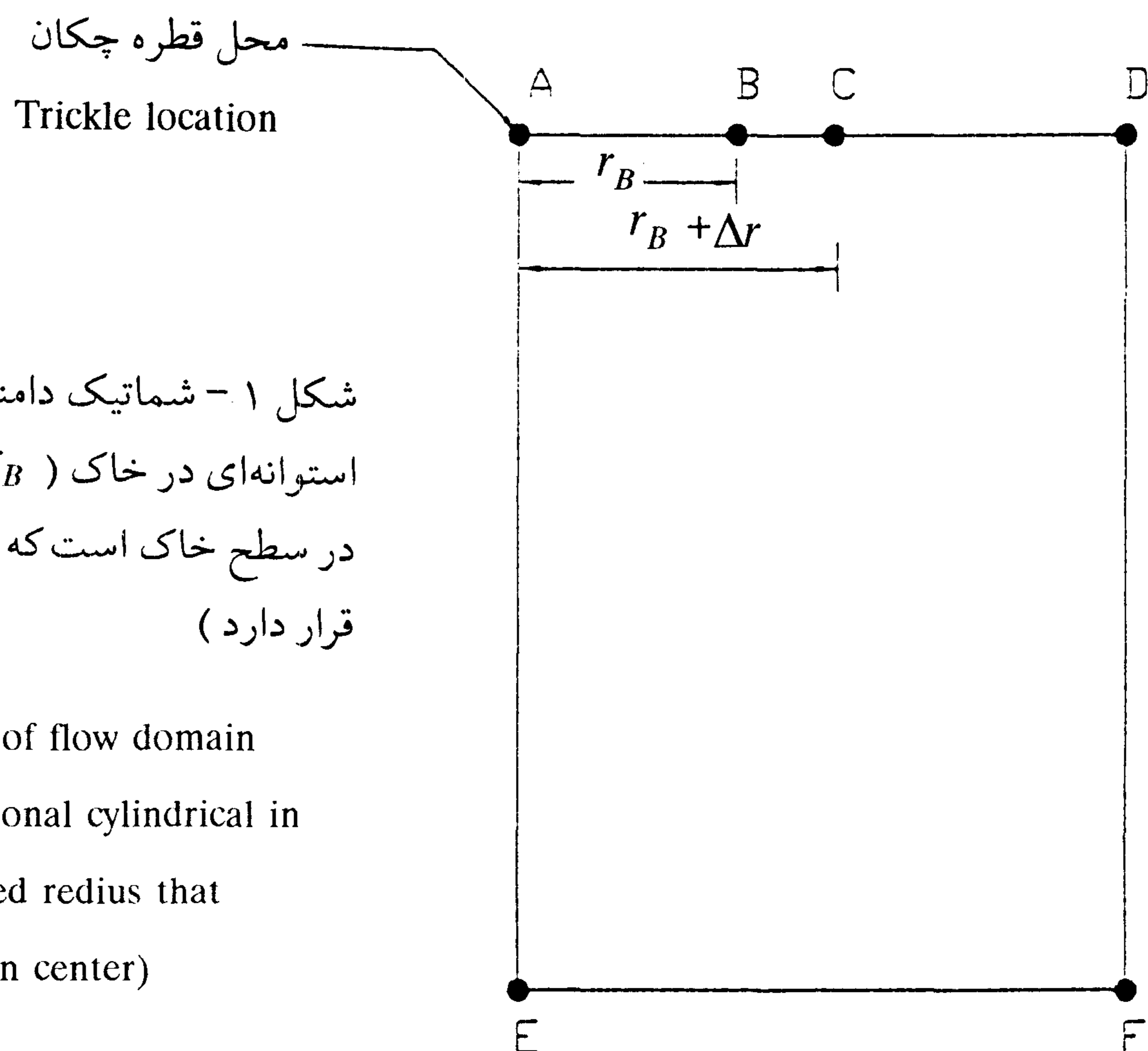
$$Q_s = \sum_{i=1}^B (-k(\Psi) \frac{\partial}{\partial z} + k(\Psi) \times (r_i^2 - r_{i-1}^2)) \times \Pi \times \Delta Z^1$$

در رابطه فوق Q_s شدت نفوذ آب از ناحیه اشباع شده به درون سطح خاک است.

۳ - بخشی از آبی که از سطح زمین وارد خاک می‌گردد از حاشیه ناحیه خیس شده صورت می‌گیرد که از رابطه زیر که در حقیقت معادله پیوستگی است محاسبه می‌شود:

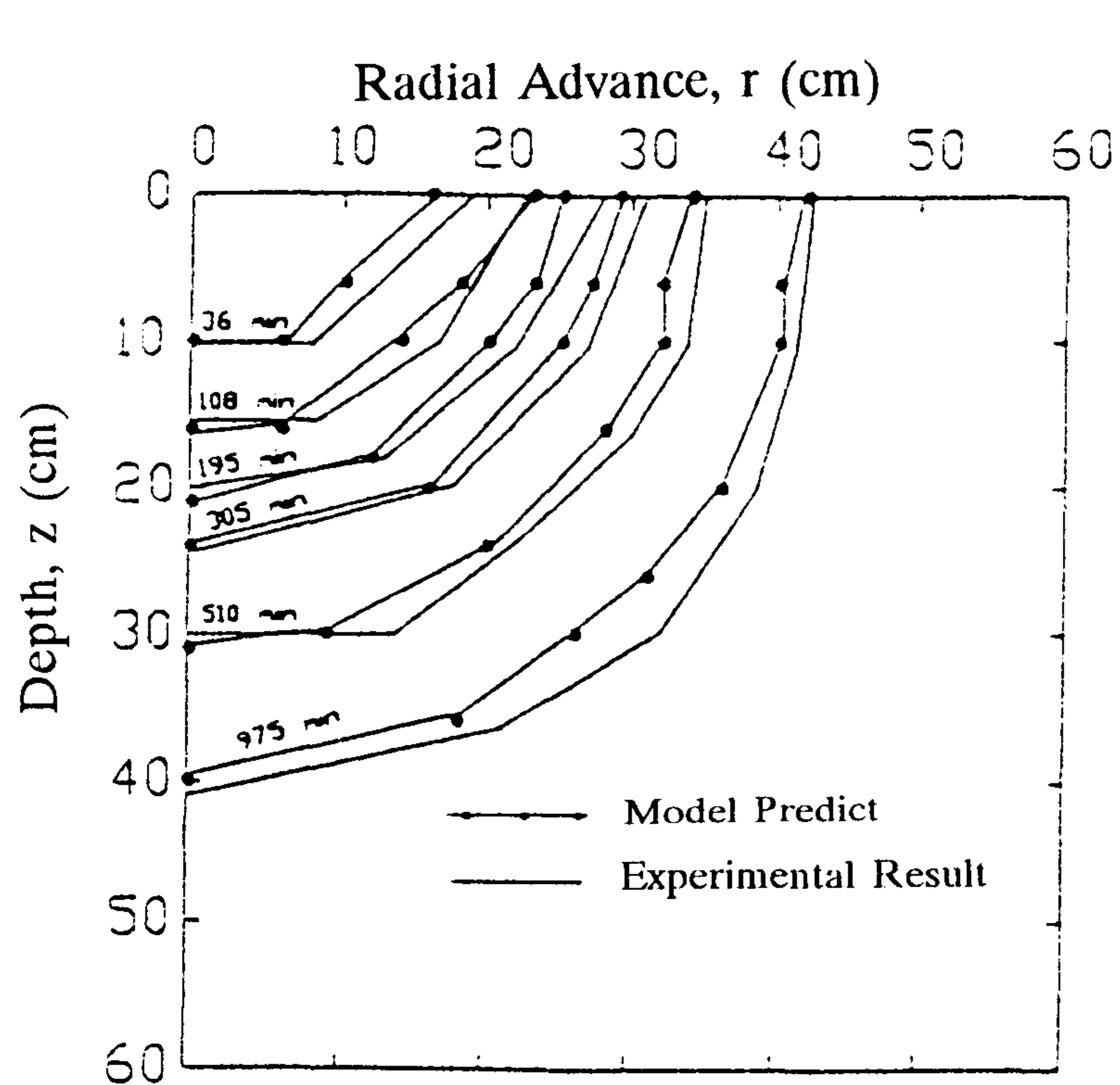
$$Q_0 = Q_e - Q_s \quad (9)$$

در رابطه فوق Q_0 شدت نفوذ آب از حاشیه



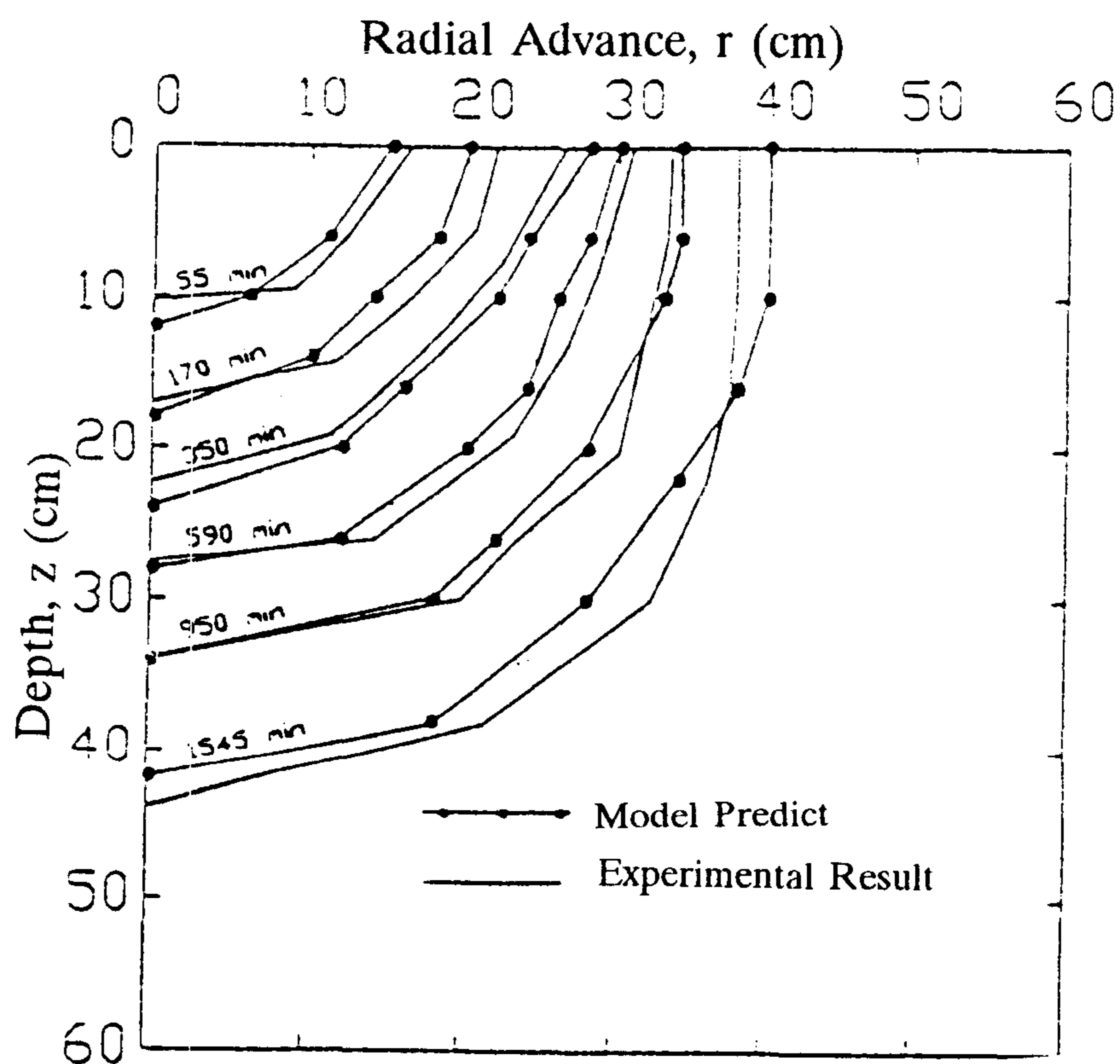
شکل ۱ - شماتیک دامنه جریان دوبعدی استوانه‌ای در خاک (r_B شعاع دایره خیس شده در سطح خاک است که قطره چکان در مرکز آن قرار دارد)

Fig 1. Schematic of flow domain for two - dimensional cylindrical in soil (r_B is ponded radius that trickle is located in center)



شکل ۳ - نتایج آزمایشگاهی و شبیه سازی جبهه رطوبت خاک ناشی از آبیاری با قطره چکان

Fig 3. Experimental and simulated positions of wetting front during trickle irrigation ($Q_e = 3300 \text{ cm}^3/\text{h}$)



شکل ۲ - نتایج آزمایشگاهی و شبیه سازی جبهه رطوبت خاک ناشی از آبیاری با قطره چکان

Fig 2. Experimental and simulated positions of wetting front during trickle irrigation ($Q_e = 2100 \text{ cm}^3/\text{h}$)

$$k = K_s e^{-\gamma \psi} \quad (19)$$

$$\theta = \theta_s + 0.0013 \psi \quad (20)$$

که در آن γ عدد ثابت به میزان $0/28$ ، K_s هدایت هیدرولیکی خاک در حالت اشباع به میزان $0/85 \text{ cm/h}$ و θ_s رطوبت اشباعی خاک به میزان $0/5 \text{ cm}^3/\text{m}^3$ است. آزمایش نفوذپذیری با دودبی مختلف از قطره چکان $Q_e = 3300 \text{ cm}^3/\text{h}$ ، $Q_e = 2100 \text{ cm}^3/\text{h}$ انجام گرفته است.

مدل با داده‌های فوق اجرا گردید. نمودارهای مکانی ($\Delta x, \Delta z$) ۲ سانتیمتر و نمودار زمان (Δt) ۵ ثانیه در نظر گرفته شده است.

نتیجه و بحث

مدل بنیان شده میزان رطوبت خاک را با گذشت زمان در فواصل شعاعی و عمودی از محل نصب قطره چکان برآورد می‌نماید. موقعیت جبهه رطوبت خاک به صورتی تعیین می‌شود که میزان رطوبت خاک حدود ۱۰ درصد بیشتر از مقدار اولیه باشد (۹). در جداول ۱ و ۲ نتایج آزمایشها و مدل ارائه شده است. در این جداول موقعیت جبهه رطوبت در سطح خاک (r) و در زیر نصب قطره چکان (z) در زمان‌های مختلف از شروع آبیاری برای دو شدت مرطوب شونده درج شده است. همانگونه که ملاحظه می‌گردد جبهه رطوبت در دو بعد شعاعی و عمودی تقریباً به طور یکسان گسترش یافته است که موید تطابق نتایج مدل و آزمایشگاه با شرایط بافت خاک است. در خاکهای سنگین جبهه رطوبت در دو بعد عمودی و شعاعی به طور یکسان گسترش می‌یابد. در اشکال ۲ و ۳ موقعیت جبهه رطوبت در اعماق مختلف و

بیان آبی مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار آب ورودی از قطره چکان به داخل خاک و تغییرات رطوبت در کل پروفیل خاک پس از T ساعت از شروع آبیاری به ترتیب از روابط زیر برآورد گردیده است:

$$V_e = Q_e \times T \quad (16)$$

$$V_s = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\theta_{i,j}^0 - \theta_{i,j}^T) \times (r_i^2 - r_{i-1}^2) \times \Pi \times \Delta z \quad (17)$$

در معادلات فوق:

$$V_e = \text{کل آب نفوذی از قطره چکان به داخل خاک در طول مدت آبیاری (lit)}$$

$$Q_e = \text{دبی قطره چکان (lit/h)}$$

$$T = \text{زمان از شروع آبیاری (h)}$$

$$V_s = \text{افزایش رطوبت در پروفیل خاک در طول مدت آبیاری (lit)}$$

$$\theta_{i,j}^0 = \text{رطوبت اولیه خاک در گره } i, j \text{ (cm}^3/\text{cm}^3)$$

$$\theta_{i,j}^T = \text{رطوبت خاک در زمان } T \text{ در گره } i, j \text{ (cm}^3/\text{cm}^3)$$

خطای محاسبات عددی از رابطه زیر برآورد شده است:

$$S = \frac{|V_e - V_s|}{V_e} \times 100 \quad (18)$$

در رابطه فوق S خطای محاسبات می‌باشد.

آنجلاکیس^۱ (۲) بر روی یک خاک همگن آزمایش نفوذپذیری موضعی را در آزمایشگاه مورد بررسی قرار داد که در این تحقیق نتایج آن با مدل بنیان شده مورد مقایسه قرار گرفته است. بافت خاک مورد آزمون لوم رسی و رطوبت اولیه خاک $\theta_0 = 0.0439 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ است. روابط بین هدایت هیدرولیکی و رطوبت خاک با پتانسیل ماتریک به شرح زیر ارائه شده است:

1-Angelakis

جدول ۱ - نتایج موقعیت جبهه رطوبت خاک در زمان‌های مختلف از شروع آبیاری با دبی

$$Q_e = 2100 \text{ cm}^3/\text{h}$$

Table 1 - Results of soil moisture front position in different times after irrigation started with rate of 2100 cm³/h

نتایج مدل		نتایج آزمایشگاهی		زمان (دقیقه)
Model results		Experimental results		Time(min)
Z	r	Z	r	
(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	
12	15	10.3	16.5	55
18	20	17	22	170
24	28	22.5	26.5	350
28	30	27.5	31	590
34	34	33.8	33.5	950
42	40	43.8	38	1545

جدول ۲ - نتایج موقعیت جبهه رطوبت خاک در زمان‌های مختلف از شروع آبیاری با دبی

$$Q_e = 3300 \text{ cm}^3/\text{h}$$

Table 2- Results of soil moisture front position in different times after irrigation started with rate of 3300 cm³/h

نتایج مدل		نتایج آزمایشگاهی		زمان (دقیقه)
Model results		Experimental results		Time(min)
Z	r	Z	r	
(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	
10	16	10.2	19	36
16	23	15.5	22.5	108
21	25	20	28	195
24	29	24.5	31	305
31	34	30	35	510
40	42	41	42.5	975

جدول ۳ - نتایج خطای محاسبات عددی برای دو شدت نفوذ آب به خاک

Table 3 - Results of numerical error for two discharges of emitter

$Q_e = 3300\text{cm}^3/\text{h}$				$Q_e = 2100\text{cm}^3/\text{h}$			
S	V_s	V_e	Time	S	V_s	V_e	Time
(%)	(lit)	(lit)	(min)	(%)	(lit)	(lit)	(min)
3.5	1.910	1.98	36	4.2	1.845	1.925	55
4.4	5.68	5.94	108	4.5	5.682	5.95	170
5.07	10.181	10.725	195	4.5	11.697	12.250	350
5.45	15.86	16.775	305	4.5	19.721	20.65	590
5.38	26.54	28.05	510	5.0	31.571	33.25	950
5.81	50.507	53.625	975	5.7	50.95	54.075	1545

سپاسگزاری
بدین وسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران
که امکانات مادی برای اجرای این تحقیق فراهم
نمودند تشکر می‌شود.

References

- منابع مورد استفاده
- 1 . Amerman CR (1969) Finite difference solutions of unsteady, two- dimensional partially saturated porous media flow. PhD thesis, Purdue Univ, Lafayette, Indiana.
 - 2 . Angelakis NA (1977) Time dependent soil water distribution in a two dimensional profile of clay loam soil under a circular trickle source. MS thesis, University of California at Davis.

در زمان‌های مختلف ارائه شده که همخوانی خوبی را بین نتایج مدل و آزمایشگاه درکل پروفیل خاک نشان می‌دهد. لذا مدل ریاضی که جریان غیرخطی در شرایط ناپایدار را باروش عددی ADI راحل می‌نماید، جبهه رطوبت خاک ناشی از قطره‌چکان موضعی را بادقت مطلوب برآورد می‌نماید. خطای محاسبات عددی برای دو آزمایش مذکور براساس بیلان جرم برآورد گردید، به صورتی که تغییرات رطوبت درکل پروفیل خاک درفاصله بین شروع وخاتمه آبیاری برکل آب وارد شده به خاک از طریق قطره‌چکان مورد مقایسه قرار گرفت و درصد خطا حدود ۵ درصد برآورد گردید که درکارهای عملی آبیاری قابل اغماض می‌باشد. نتایج خطای محاسبات عددی در جدول ۳ ارائه شده است.

- 3 . Ben Asher J, Lomen DO and warrick AW (1978) Linear and nonlinear models of infiltration from a point source. Soil Sci. Soc. Am. J. 42:3-6.
- 4 . Elmaloglou S and Grigorakis Q(1997) Linear and nonlinear models of infiltration from surface line source of trickle irrigation . ICID Journal , V. 46(2): 81-91.
- 5 . Lomen DO and Warrick AW (1974) Time - dependent linearized infiltration . Soil Sci Soc. Am. proc. 38:568-572.
- 6 . Philip JR (1971) General theorem on steady infiltration from surface with application to point and line sources. Soil Sci. Soc. Am. proc. 35: 867-871.
- 7 . Raats PAC (1971) Steady infiltration from point sources cavities and basins. Soil Sci. Soc . Am. proc. 35:689-694.
- 8 . Raats PAC (1972) Steady infiltration from sources at arbitrary depth. Soil Sci. Soc. Am. proc. 36:399-401.
- 9 . Taghavi S, Marino MA and Rolston DE (1984) Infiltration from trickle irrigation source . Journal of Irrigation and Drainage Engineering . Vol. 110 ,(4): 331-341.
- 10 . Warrick AW (1974) Time- dependent linearized infiltration(1: point sources). Soil Sci. Soc. Am, proc. 38:383-387.
11. Warrick AW and Lomen DO (1976) Time- dependent linerized infiltration. 111: strip and disc sources. Soil Sci. Soc. Am. J. 40 : 639-643.