

معادله صریح تعیین عمق بحرانی در کانال‌های ذوزنقه‌ای

An explicit equation for calculating critical depth in trapezoidal channels

علیرضا وطن خواه محمدآبادی* و صلاح کوچک زاده**

چکیده

مقاطع ذوزنقه‌ای از پرکاربردترین مقاطع هندسی در شبکه کانال‌های انتقال و توزیع آب می‌باشد و تعیین عمق بحرانی در این کانالها از ضرورت‌های طراحی است. در سالهای اخیر فرمولهای ارائه شده‌اند که امکان محاسبه مستقیم عمق بحرانی را بدون کاربرد روشهای تکرار با دقت مطلوب فراهم کرده‌اند. در این مقاله معادله صریح جدیدی برای تعیین عمق بحرانی ارائه شده است که سهولت محاسبات، نداشتن محدودیت دامنه کاربرد و ارائه دقیقترین نتایج در بین معادلات پیشنهادی از ویژگیهای آن می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: جریان بحرانی، کانالهای روباز، مقاطع ذوزنقه‌ای، حل عددی

مقدمه

طراحی کانالهای روباز و تحلیل جریان در آنها مستلزم تعیین عمق بحرانی است. تعیین عمق بحرانی در مجاری هندسی منظم (مستطیل، ذوزنقه، دایره،...) یا به کمک منحنیهای طراحی (۱، ۲، ۳، ۵) و یا با استفاده از روشهای عددی مبتنی بر تکرار و آزمون و خطا میسر است. سوامی (۶) برای مقاطع ذوزنقه‌ای، ذوزنقه‌ای گرد گوشه، ذوزنقه‌ای با کف گرد شده و دایره‌ای روابطی برای تعیین عمق بحرانی ارائه کرده است که در دامنه ابعاد کاربردی، حداکثر خطای آنها در حدود دو درصد است.

همچنین وانگ (۸) با کاربرد تئوری تکرار حل تحلیلی صریحی برای معادله عمق بحرانی در کانالهای ذوزنقه‌ای ارائه نمود که اگر چه این معادله عمق واقعی بحرانی را بدون آزمون و خطا تعیین می‌کند، اما پیچیدگی رابطه و گستردگی آن کاربرد آن را دشوار کرده است.

به دلیل عدم دخالت اثر شیب طولی کانال در معادله پیشنهادی وانگ، سوامی (۷) ادعای دقت بالای معادله را مورد تردید قرار داده و معادله خود را به دلیل سهولت کاربرد و قابلیت پذیرش دو شیب دیواره جانبی، برتر دانست. همچنین وو و کاتوپودز (۹) ضمن تجلیل از

* - کارشناس ارشد تأسیسات آبیاری دانشکده کشاورزی دانشگاه تهران، تهران - ایران

** - استادیار گروه آبیاری دانشکده کشاورزی دانشگاه تهران، تهران - ایران

با مربع کردن معادله (۱) و جایگزینی عرض آزاد جریان بحرانی T_c ، به جای A_c/D_c معادله (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (2)$$

سمت راست معادله (۲) تابعی از هندسه مقطع و عمق جریان y_c ، در حالت بحرانی است. در مقاطع هندسی ساده، به ازای هر بده مشخص، معادله فوق فقط یک جواب برای عمق بحرانی می‌دهد. اما در کانالهای با مقاطع مرکب امکان وقوع بیش از یک عمق برای یک بده مشخص نیز وجود دارد (۱).

از معادله (۲) روابط صریحی برای محاسبه عمق بحرانی در مقاطع مستطیلی و مثلثی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_{cr} = \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2 \cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

$$y_{ct} = \left(\frac{2 \alpha Q^2}{g Z^2 \cos \theta} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (4)$$

در روابط فوق b = عرض کف کانال، Z = شیب دیواره‌های جانبی کانال، y_{cr} = عمق بحرانی در مقطع مستطیل و y_{ct} = عمق بحرانی در مقطع مثلثی است.

کانال دوزنقه‌ای

اگر y_c را به عنوان عمق بحرانی در کانال با مقطع دوزنقه‌ای در نظر بگیریم، معادله (۲) برای چنین مقطعی به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta} = \frac{A_c^3}{T_c} = \frac{[(b + Zy_c)y_c]^3}{b + 2Zy_c}$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g b^2 \cos \theta} = \frac{\left(1 + \frac{Zy_c}{b}\right)^3 y_c^3}{1 + \frac{2Zy_c}{b}}$$

$$y_c = \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2 \cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\left[1 + \frac{2Zy_c}{b}\right]^{\frac{1}{3}}}{1 + \frac{Zy_c}{b}} \quad (5)$$

یافته‌های وانگ بر پیچیده بودن رابطه پیشنهادی ایشان تاکید کرده‌اند. از این رو براساس یافته‌های وانگ، وو و کاتوپودز فرمولی را ارائه کرده‌اند که در دامنه ابعاد هندسی کاربردی کانالها، عمق بحرانی را با سهولت بیشتری نسبت به معادله وانگ محاسبه می‌کند. روابط پیشنهادی وو و کاتوپودز در دامنه ابعاد کاربردی حداکثر خطای نسبی ۱/۵٪ را دربردارد. اما خارج از محدوده ابعاد کاربردی میزان خطای آن از این هم فراتر می‌رود و تا ۳/۵٪ می‌رسد (۹). بنابراین معادلات ارائه شده کنونی اگر چه از دقت مطلوبی برخوردار هستند، اما هر کدام به نوعی برای محدوده‌ای قابلیت کاربرد دارند. در این تحقیق معادله صریحی برای محاسبه عمق بحرانی در کانالهای دوزنقه‌ای ارائه می‌گردد. این معادله علاوه بر نداشتن هیچگونه محدودیت دامنه کاربرد، حداکثر خطای نسبی آن کمتر از ۰/۴۵٪ است که بالاترین دقت در بین معادلات ارائه شده کنونی است. مزید بر آن در محدوده ابعاد عملی مقدار خطای آن به نصف مقدار فوق تقلیل می‌یابد که مزیت آن را نسبت به معادلات موجود تبیین می‌کند.

مواد و روشها

در کانالهای روباز با مساوی قرار دادن عدد فرود برابر با یک و حل معادله حاصل عمق جریان بحرانی قابل محاسبه خواهد بود. اگر توزیع سرعت در مقطع عرضی یکنواخت نباشد و شیب طولی کانال نیز قابل توجه باشد، ضروری است که ضریب انرژی جنبشی α و اثر شیب نیز در نظر گرفته شود، در این صورت عدد فرود در مقطع بحرانی به شکل زیر در می‌آید (۱، ۲، ۳، ۴، ۵):

$$F = \frac{Q/A_c}{\sqrt{g D_c \frac{\cos \theta}{\alpha}}} = 1 \quad (1)$$

که در آن Q = بده جریان، A = سطح مقطع جریان بحرانی، g = شتاب ثقل، D_c = عمق هیدرولیکی در مقطع بحرانی و θ = زاویه کف کانال با افق.

با جایگزینی رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{y_c}{y_{cr}}\right)^{-p} = 1 + \left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right)^{0.4p}$$

$$k = \left[1 + \left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right)^{0.4p} \right]^{\frac{-1}{p}} \quad (12)$$

حال باید مقدار p تعیین گردد. برای این منظور k را بین روابط (۸) و (۱۲) حذف می‌کنیم و نمودار تغییرات p بر حسب M را رسم می‌کنیم و منحنی مناسبی بر آن برازش می‌دهیم. معادله منحنی برازش یافته به صورت زیر در آمد:

$$p = 2.095 \left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right)^{-0.047} \quad (13)$$

و یا:

$$p = 2.095 \left(\frac{y_{ct}}{y_{cr}}\right)^{0.1175} \quad (14)$$

بدین ترتیب با تعریف تابع تغییرات p بر حسب M مقدار k به صورت تابع صریح از M به وسیله معادله (۱۲) قابل محاسبه است.

نتایج

بر اساس روابط ارائه شده در این مقاله، تعیین عمق بحرانی در مقاطع دوزنقه‌ای بی‌نیاز از آزمون و خطا خواهد بود. مراحل محاسبه بدین ترتیب است که ابتدا اعماق بحرانی مقاطع مستطیلی y_{cr} و مثلثی y_{ct} به ازای بده و ابعاد کانال مورد نظر به کمک معادلات (۳) و (۴) تعیین می‌شوند، سپس بعد از محاسبه p به کمک معادله (۱۴)، عمق بحرانی مقطع دوزنقه‌ای به کمک معادله (۱۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$y_c = \left(y_{cr}^{-p} + y_{ct}^{-p} \right)^{\frac{-1}{p}} \quad (15)$$

با تعریف فاکتور $M = \frac{Zy_{cr}}{b}$ و فرض

$$y_c = ky_{cr} \quad (6)$$

معادله (۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$y_c = y_{cr} \frac{(1+2kM)^{\frac{1}{3}}}{1+kM} \quad (7)$$

با مقایسه معادلات (۶) و (۷) مقدار ضریب k

برابر خواهد بود با:

$$k = \frac{(1+2kM)^{\frac{1}{3}}}{1+kM} \quad (8)$$

معادله (۸) بیان کننده یک رابطه ضمنی بین k و M بوده و برای $M \geq 0$ و فرض اولیه $k = 1$ همواره همگرا می‌باشد. در اینجا باید به دنبال رابطه صریحی بین k و M به صورت $k = f(M)$ باشیم. دستیابی به تابع صریح مثل f ممکن است بسیار دشوار یا غیر ممکن باشد، اما اگر رابطه‌ای یافت شود که بتواند تابع فوق را با دقت زیادی تخمین زند، مقصود حاصل شده است. در اینجا برای تعریف چنین رابطه‌ای فرض می‌شود بتوان عمق جریان بحرانی در مقطع دوزنقه‌ای را به کمک عمق بحرانی مقطع مستطیلی که عرض کف آن هم عرض کف مقطع دوزنقه‌ای باشد، و عمق بحرانی مثلثی که شیب دیواره جانبی آن هم شیب مقطع دوزنقه‌ای باشد، به وسیله معادله زیر به دست آورد:

$$\frac{1}{y_c} = \frac{1}{y_{cr}} + \frac{1}{y_{ct}} \quad (9)$$

رابطه (۹) فقط برای مقاطع مستطیلی، $z = 0$

و مثلثی، $b = 0$ صادق است و برای اینکه در مقاطع دوزنقه‌ای نیز صادق باشد با وارد کردن نمایی مثل p آنرا متعادل می‌کنیم:

$$y_c^{-p} = y_{cr}^{-p} + y_{ct}^{-p} \quad (10)$$

از آنجا که نسبت بین اعماق بحرانی مثلثی و

مستطیلی برابر با:

$$\frac{y_{ct}}{y_{cr}} = \left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right)^{-0.4} \quad (11)$$

بررسی میزان خطا

برای بررسی میزان خطا، مقادیر محاسبه شده k از معادلات (۸) و (۱۲) مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. اگر نتایج رابطه ضمنی (۸) با هر دقت دلخواه به عنوان حل واقعی تلقی گردد، میزان خطا را نسبت به این حل واقعی میتوان تعیین کرد. در اینجا مقدار k برای مقادیر مختلف $M \geq 0$ با دقت 10^{-15} محاسبه شده و به عنوان حل واقعی k_{ac} در نظر گرفته شده است. بر این اساس برنامه کامپیوتری تنظیم گردید که مقادیر واقعی و مقادیر تخمینی k_{es} را محاسبه و میزان خطا را تعیین می‌کند. اگر چه عمدتاً دامنه تغییرات M برای ابعاد عملی کانالها بین صفر و ده قرار می‌گیرد، اما مقادیر k برای دامنه تغییرات $10^4 \geq M \geq 0$ محاسبه شده و در شکل ۱ ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در چنین دامنه بسیار وسیعی حداکثر خطا کمتر از ۰/۴۵٪ است که کمترین مقدار بین معادلات ارائه شده کنونی می‌باشد. میزان ماکزیمم خطا در محدوده‌ای واقع می‌شود که ارزش کاربرد عملی ندارد، در محدوده ابعاد کاربردی میزان حداکثر خطا، همانطور که در شکل ۲ ارائه شده است، تقریباً به نصف مقدار فوق تقلیل می‌یابد که نشان دهنده ارزش کاربردی قابل توجه معادلات پیشنهادی است. برای مقایسه عمق بحرانی محاسبه شده با یکی از روشهای تکرار متداول و فرمول پیشنهادی، کانال دوزنقه‌ای با عرض کف ده متر و شیب دیواره جانبی ۱/۵ در نظر گرفته شد. عمق بحرانی برای بده‌های ۱ تا ۱۰۰ متر مکعب بر ثانیه با هر دو روش محاسبه و در شکل ۳ ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود دو منحنی عمق واقعی y_{ca} و عمق محاسبه شده به روش پیشنهادی y_{ce} عملاً بر هم منطبق هستند. شکل ۴ میزان خطای نسبی بین روش تکرار که با دقت 10^{-12} محاسبه شده و به عنوان حل واقعی در نظر گرفته شده است، و روش پیشنهادی در دامنه بده مذکور برای عرض کف‌های ده و پنج متر را ارائه می‌دهد. همانطور که مشاهده میشود

حداکثر خطای نسبی برای دقت مذکور در حد ۰/۲٪ است.

بحث و نتیجه‌گیری

طراحی شبکه‌های انتقال آب با سطح آزاد مستلزم محاسبه عمق بحرانی است. طراحی کانال با مقطع هندسی دوزنقه بیشترین کاربرد را در شبکه‌های آبیاری و زهکشی دارد. محاسبه عمق بحرانی در این مقطع مستلزم استفاده از گرافهای طراحی با پذیرش در صد قابل توجه خطا یا کاربرد روش آزمون و خطا می‌باشد. در بیست سال گذشته محققین کوششهایی برای ارائه راه‌حلهای با دقت مطلوب و قابلیت کاربرد وسیع به عمل آورده‌اند. اگرچه کوششهای انجام شده به نتایج مطلوبی رسیده است، اما این نتایج در مواردی با محدودیت دامنه کاربرد مواجه بوده‌اند و یا حجم عملیات محاسباتی فرمول‌های ارائه شده زیاد بوده و یا میزان ماکزیمم خطای ایجاد شده زیاد می‌باشد (در حد ۰/۲٪). در تحقیق فعلی رابطه ارائه شده علاوه بر نداشتن محدودیت دامنه کاربرد، ماکزیمم خطای نسبی آن در حد ۰/۴۵٪ است و در دامنه ابعاد کاربردی سازه‌ها این خطا در حد ۰/۲۸٪ است که از معادلات پیشنهادی کنونی بسیار دقیق‌تر است.

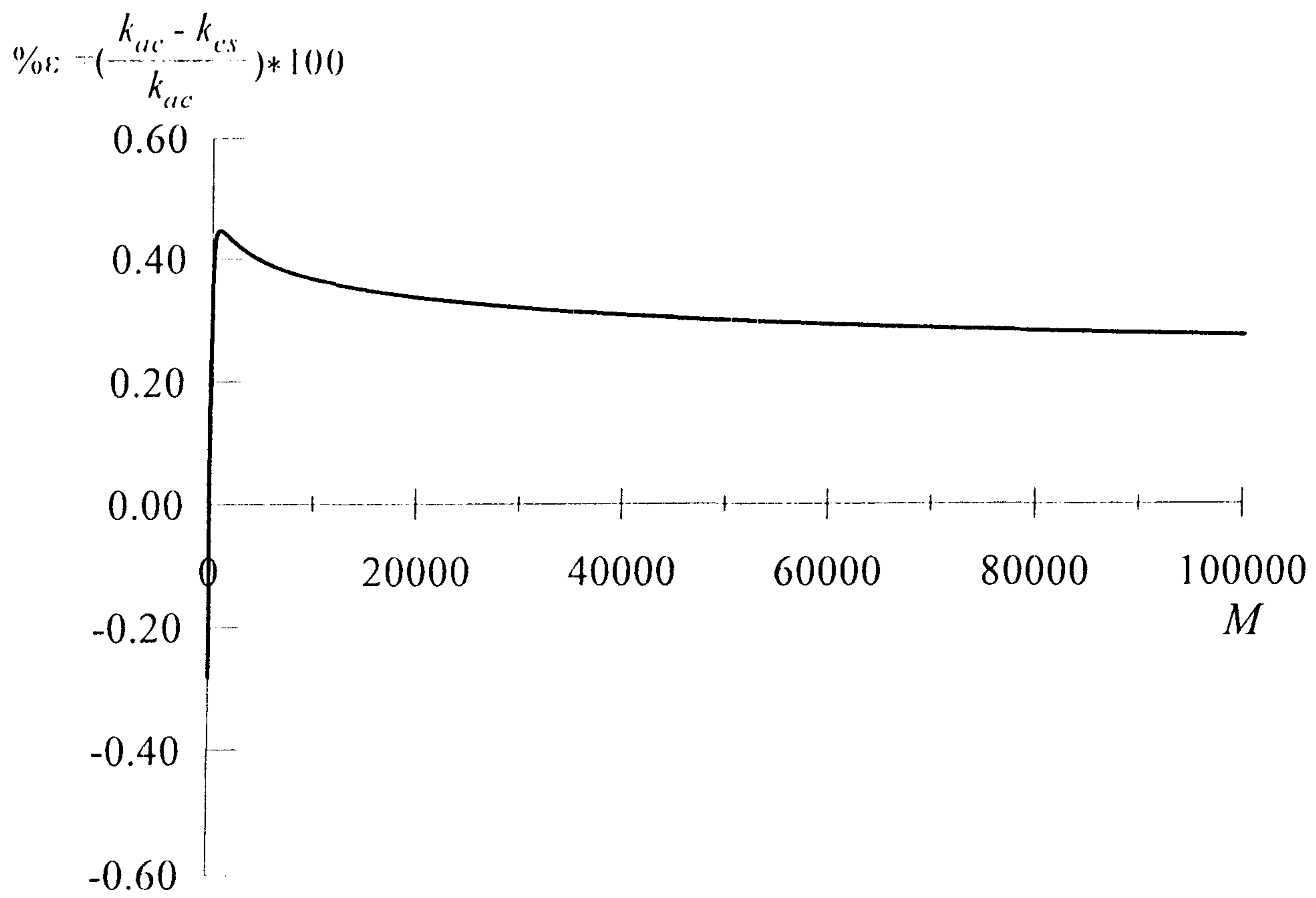
تشکر و قدردانی

بدینوسیله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران که امکانات و فضای مناسب تحقیق را فراهم نموده‌اند تشکر و قدردانی می‌شود.

References

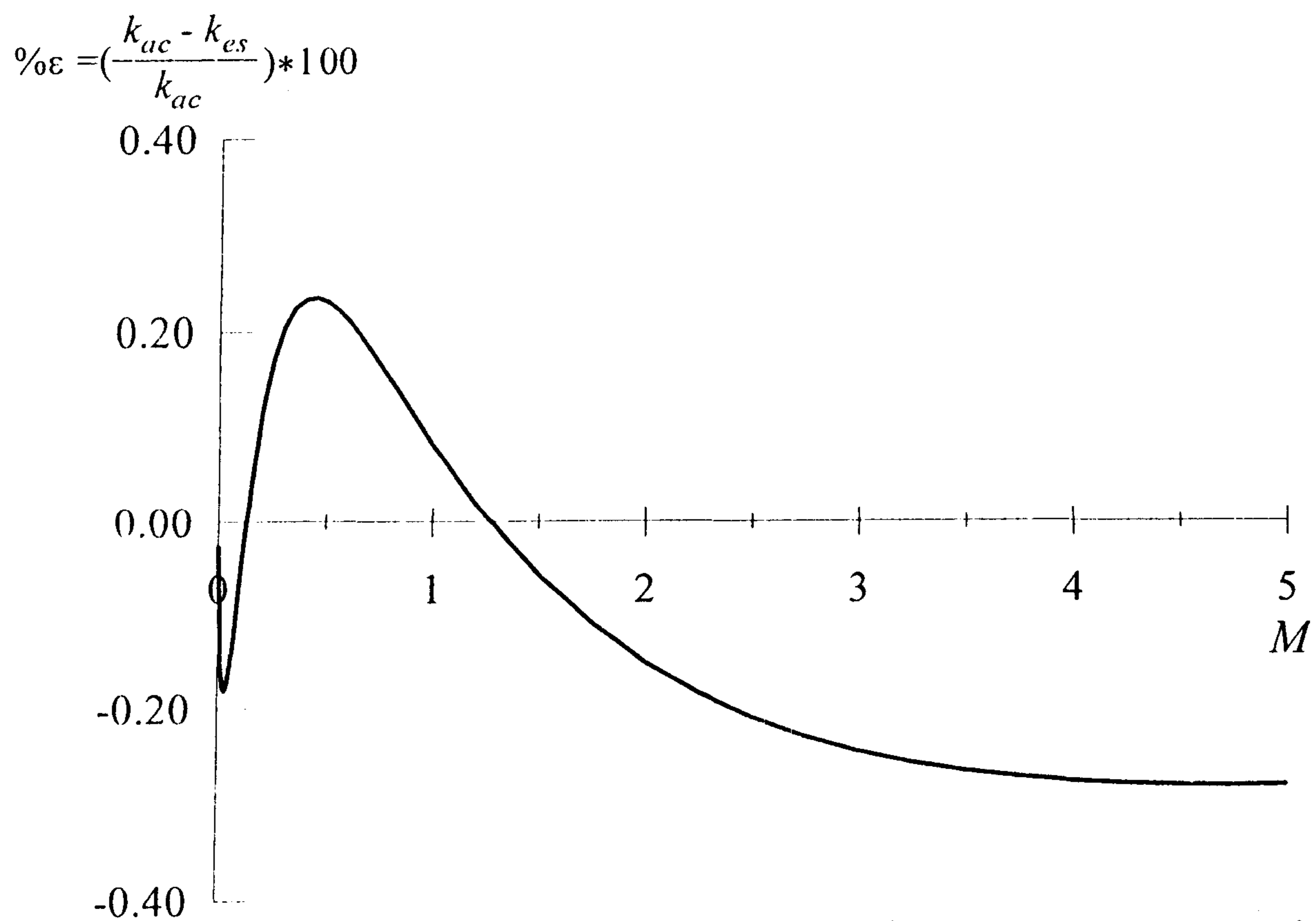
منابع مورد استفاده

- 1 . Chaudhry MH (1993) Open Channel Flow, Printice Hall Co. NY.
- 2 . Chow VT(1959) Open Channel Hydraulics, McGraw -Hill Co. NY.
- 3 . French RH (1986) Open Channel



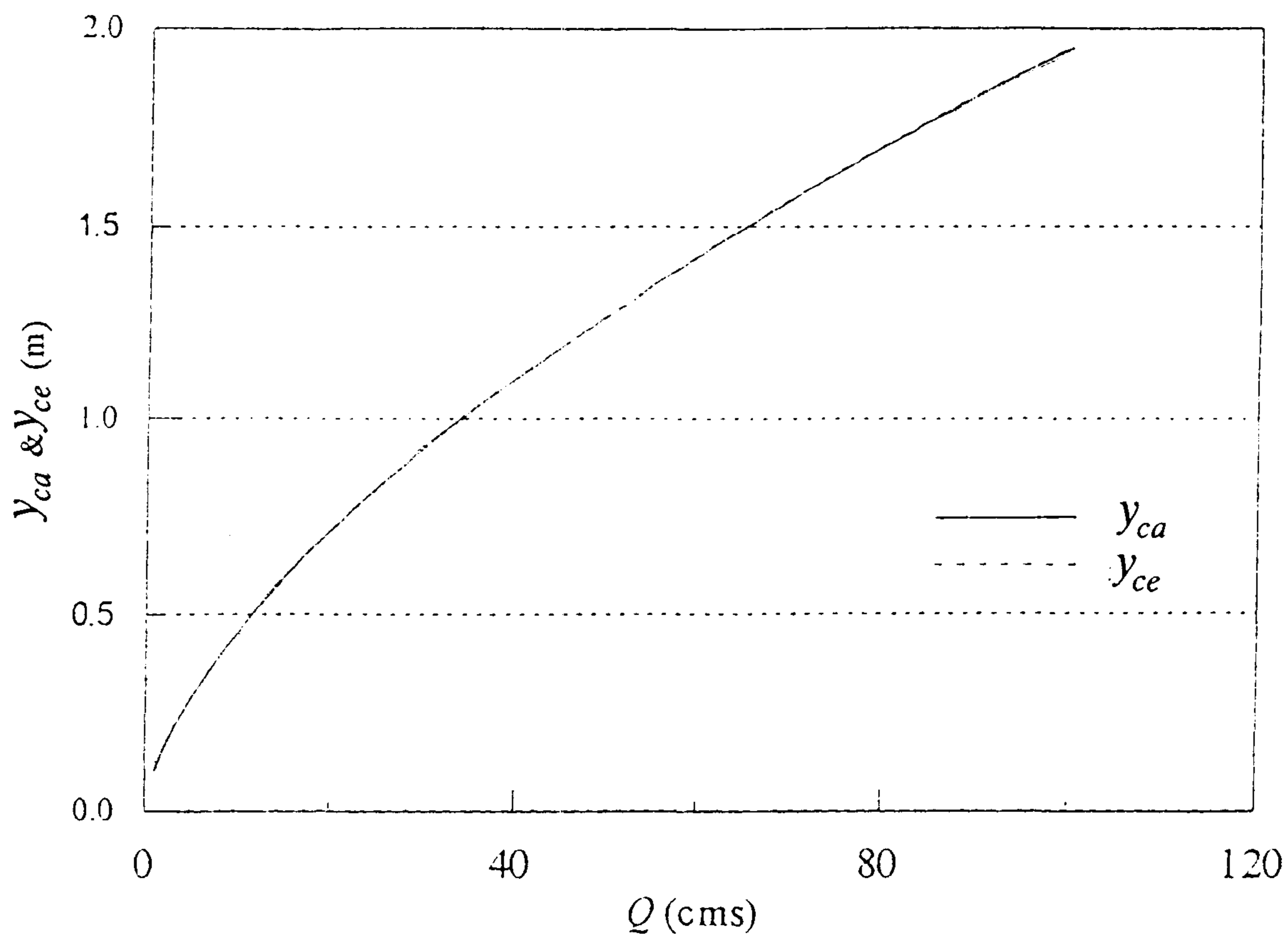
شکل ۱ - تغییرات درصد خطای نسبی ضریب k برای دامنه وسیع M

Fig 1. Relative error of k for a wide range of M



شکل ۲ - تغییرات درصد خطای نسبی ضریب k برای دامنه کاربردی M

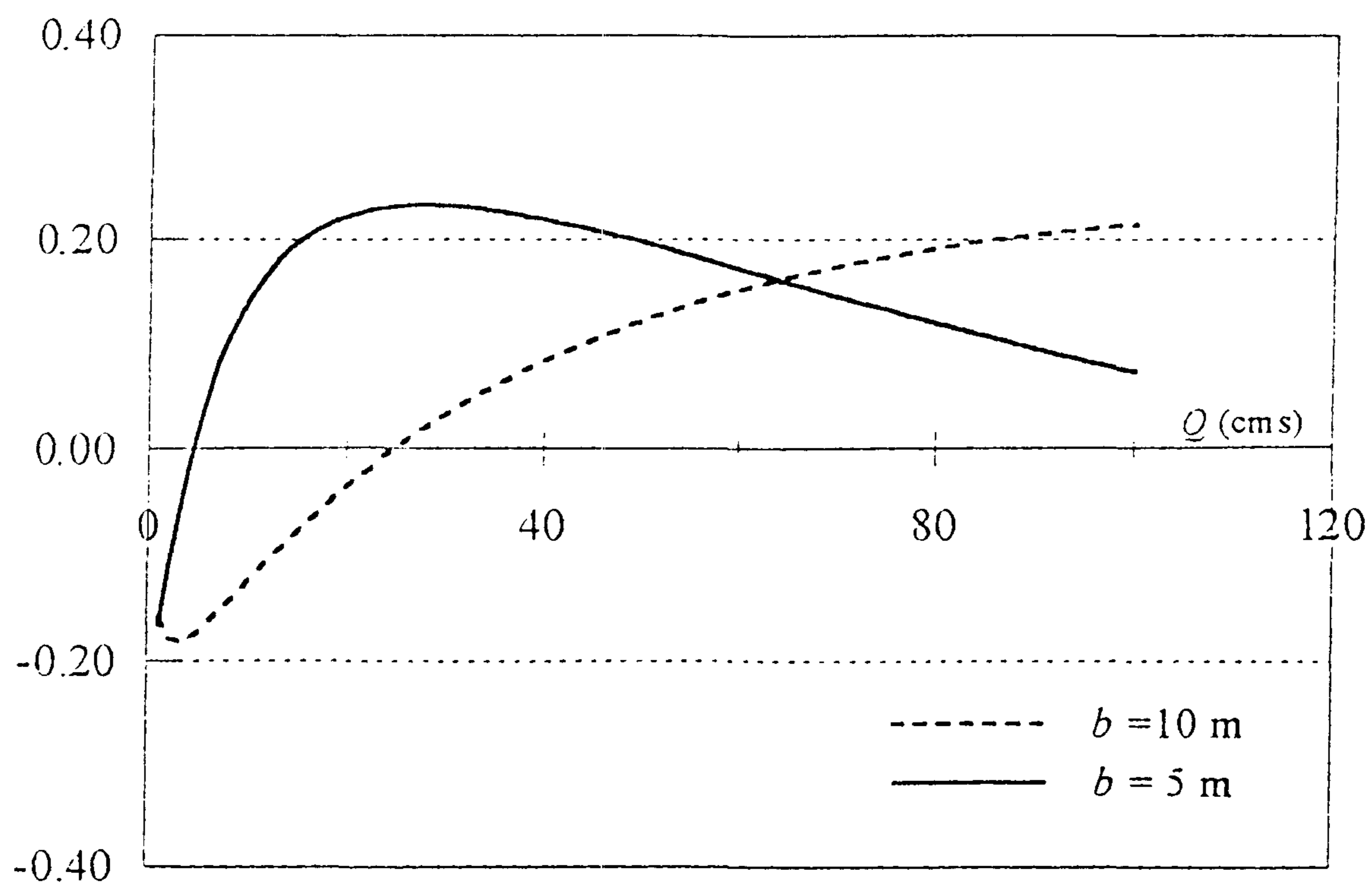
Fig 2. Relative error of K associated with practical range of M



شکل ۳- تغییرات اعماق بحرانی y_{ca} و y_{ce} برای بده‌های مختلف

Fig 3. Comparison between actual critical depth y_{ca} and computed values, y_{ce} , for a range of discharges

$$\% \varepsilon = \left(\frac{y_{ca} - y_{ce}}{y_{ca}} \right) * 100$$



شکل ۴- تغییرات درصد خطای نسبی اعماق بحرانی برای مثال ارائه شده

Fig 4. Relative errors associated with critical depths calculation of the design example using the proposed method

- Hydraulics, McGraw-Hill Co. NY.
- 4 . Graf WH (1998) Fluvial Hydraulics. John Wiley Co., NY.
- 5 . Henderson FM (1966) Open Channel Flow. MacMillan Co. NY.
- 6 . Swamee PK (1993) Critical depth equations for irrigation canals. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, Vol. 119, No 2:400-409.
- 7 . Swamee PK (1999) Discussion on formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel by Wang . Journal of Hydraulic Engineering, ASCE , Vol. 125, No 7:787.
- 8 . Wang Z (1998) Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 124, No 1:90-91.
- 9 . Wu S and Katopodis C (1999) Discussion on formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel by Wang . Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 125, No 7:786.